Compito 1

Dottorato di Ricerca in Matematica – XXI ciclo

L'Aquila, 17 ottobre 2005

Il candidato risolva alcuni degli esercizi tra i seguenti, scegliendoli preferibilmente non tutti nello stesso settore (A, B, C, D, E).

Esercizio A1

1. Enunciare il Teorema di Gauss-Bonnet per superfici regolari in $\mathbb{R}^3$.

2. Sia M una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ con curvatura di Gauss $K > 0$. Dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico su M é maggiore di π.

3. Calcolare la curvatura di Gauss in ogni punto del cilindro di $\mathbb{R}^3$, ovvero la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio A2

Si consideri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la curva algebrica C di equazione omogenea

$$x_1^3 - x_2^3 - x_0 x_1^2 = 0$$

1. Dire (giustificando la risposta) se la curva C é irriducibile.

2. Dire (giustificando la risposta) se la curva C é razionale e in caso di risposta affermativa darne una parametrizzazione.

3. Sia D una curva algebrica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione omogenea

$$x_1^3 - 2x_2^3 - x_0^2 x_1 = 0.$$

Trovare gli eventuali punti di intersezione tra C e D e determinarne la molteplicitá.

Esercizio B1

1. Sia R un anello commutativo con l'unitá e sia M un ideale di R. Supponiamo che ogni elemento di R che non appartenga ad M sia un invertibile di R. Dimostrare che M é l'unico ideale massimale di R.

2. Fornite un esempio esplicito di un anello con unico ideale massimale.
3. Fornite un esempio esplicito di un anello con infiniti ideali massimali.

Esercizio B2

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che

$$T^3 - 2T^2 - T + 2I = 0$$

ove I é l'applicazione identica, 0 é l'applicazione nulla, $T^2 = T \circ T$ e $T^3 = T \circ T \circ T$. Dimostrare che T é diagonalizzabile.

Esercizio C1

Nello spazio $L^2(2\pi)$ (spazio delle funzioni a valori complessi, periodiche di periodo 2π, misurabili, a quadrato integrabile nel periodo, con la consueta norma), si trovi lo spettro dell'operatore $T: \ f \longrightarrow \tilde{f}$, dove

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-t)} f(t) \ dt.$$

Si dimostri anche che T è compatto.

Esercizio C2

Siano f e g funzioni continue su $\mathbb{R}$ tali che $f(x+1) = f(x)$, $g(x+1) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.$$

Esercizio C3

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } \Omega = \{(x, y,) \in \mathbb{R}^2 : \; y > 0\} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \; f \text{ funzione assegnata continua e limitata} \\ u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

i) Si provi che esso ha al più una soluzione;

ii) utilizzando la trasformata di Fourier si determini la soluzione del problema.

Esercizio D1

Sia Oxy un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in un piano verticale, con l'asse delle ordinate diretto come la verticale ascendente.
Lungo l'asse delle ordinate e' libero di scorrere senza attrito un punto materiale P_1 di massa m_1; inoltre il punto P_1 e' il centro di una circonferenza $\mathcal{C}$ priva di massa e di raggio l su cui si muove senza attrito un altro punto materiale P_2 di massa $m_2 > m_1$.
I punti P_1 e P_2 sono legati all'origine O mediante due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.
Si denoti con y l'ordinata di P_1 e con ϕ l'angolo che $\overline{P_1P_2}$ forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Determinare le posizioni di equilibrio.
3. Studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha = \frac{(m_2-m_1)g}{kl}$, $\alpha \neq 1$.
4. Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio che si ottiene per $\phi = \frac{\pi}{2}$ (quando e' stabile) e determinare le condizioni sui parametri per cui il moto linearizzato e' periodico.

Esercizio D2

Si consideri una particella quantistica in dimensione uno soggetta ad una evoluzione libera descritta dall'Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$$

dove si e' posto $m = \hbar = 1$, e si supponga che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Dimostrare che

$$\psi_t(x) \equiv \left(e^{-itH_0}\psi_0\right)(x) = \frac{e^{i\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{it}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t^2}}}{\pi^{1/4}} + \alpha_t(x)$$

   dove $\lim_{t\to\infty} \|\alpha_t\|_{L^2} = 0$.

   (Si ricordi che $e^{-itH_0}(x-y) = \frac{e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi i t}}$).

2. Facendo uso del risultato del punto (1), verificare che

$$\lim_{t\to\infty} t|(\psi_0, \psi_t)|^2 = 2$$

   (Si ricordi che $\int_0^\infty dx e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Esercizio E1

Sia $\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i = 0, 1\} = \{0, 1\}^{\otimes n}$ il prodotto cartesiano n-volte dello spazio di base $\{0, 1\}$ (un elemento $\omega \in \Omega_n$ e' una sequenza lunga n costituita da 0 ed 1).

a) Calcolare $|\Omega_n|$ ($|\cdot|$ e' la cardinalità di $\cdot$) e $|\mathcal{P}(\Omega_n)|$ ($\mathcal{P}(\cdot)$ e' l'insieme delle parti di $\cdot$). Sia $A_k = \{\omega \in \Omega_n : \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}$, calcolare $|A_k|$. Calcolare la cardinalità del sottoinsieme di Ω_n costituito dalle sequenze che appartengono ad A_3 e che non hanno 1 in posizioni adiacenti.

b) Si consideri su Ω_n la misura di probabilità $\mu_p^{\otimes n}$ prodotto di misure di Bernoulli di parametro p. Calcolare

$$P_{\mu_p^{\otimes n}}\Big(\{\omega : \omega \geq \tilde{\omega}\} \Big)$$

Dare una stima dall'alto ($\leq$) utilizzando la disuguaglianza di Jensen di

$$E_{\mu_p^{\otimes n}}\left[\log\left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right)\right].$$

Calcolare

$$\psi(z) = E_{\mu_p^{\otimes n}}\left(z^{\sum_{i=1}^n \omega_i}\right); \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P_{\mu_{\frac{\lambda}{n}}^{\otimes n}}(A_k)\,; \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P_{\mu_p^{\otimes n}}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\omega_i - p)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{4}\right).$$

Abbiamo indicato con $E_{\mu_p^{\otimes n}}$ e con $P_{\mu_p^{\otimes n}}$ rispettivamente il valore di aspettazione e la probabilità rispetto alla misura $\mu_p^{\otimes n}$.