Compito 3

Dottorato di Ricerca in Matematica – XXI ciclo

L'Aquila, 17 ottobre 2005

Il candidato risolva alcuni degli esercizi tra i seguenti, sceglien-doli preferibilmente non tutti nello stesso settore (A, B, C, D, E).

Esercizio A1

1. Dare la definizione di varietá differenziabile orientabile.

2. Considerare una superficie regolare S di $\mathbb{R}^3$ e sia $T_p(S)$ il suo piano tangente nel punto $p \in S$. Dimostrare che la superficie S é una varietá orientabile se e solo se esiste un'applicazione differenziabile $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $N(p) \perp T_p(S)$, $|N(p)| = 1$ per ogni $p \in S$. L'applicazione N si dice *Mappa di Gauss* di S.

3. Calcolare la mappa di Gauss del paraboloide iperbolico in $\mathbb{R}^3$, ovvero la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = y^2 - x^2\}$.

Esercizio A2

Al variare di $k \in \mathbb{C}$, si consideri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la curva algebrica C_k di equazione omogenea

$$kx_0x_1x_2 + (x_0 + x_1 + x_2)(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) = 0$$

1. Si determinino i punti comuni a tutte le curve C_k.
2. Si dica per quali valori di k la curva C_k é irriducibile.
3. Per ogni k, si determinino le singolaritá di C_k e il loro ordine.

Esercizio B1

Sia R un anello commutativo con l'unitá.

1. Sia a un elemento nilpotente di R (ovvero esiste $n > 0$ tale che $a^n = 0$). Dimostrare che $1 + a$ é un elemento invertibile di R.
2. Sia $N = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ nilpotente }\}$. Dimostrare che N é un ideale di R.
3. Dimostrare che $N = \cap\{P \mid P \text{ ideale primo di } R\}$.

Esercizio B2

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che

$$T^3 - T^2 - 9T + 9I = 0$$

ove I é l'applicazione identica, 0 é l'applicazione nulla, $T^2 = T \circ T$ e $T^3 = T \circ T \circ T$. Dimostrare che T é diagonalizzabile.

Esercizio C1

Sia h una funzione definita nel quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$ misurabile e a quadrato integrabile in Q. Dimostrare che l'operatore $H : \ f \longrightarrow \tilde{f}$ così definito:

$$\tilde{f}(x) = \int_0^1 h(x,y) f(y) \, dy$$

è limitato in $L^2([0,1])$ ed è compatto.

Esercizio C2

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y}\ (e^y - e^x + 1) \\ y(0) = \alpha, \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio C3

Sia $f : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\left| \int_\gamma f \ ds \right| \leq |\gamma(1) - \gamma(0)| + l(\gamma)^2$$

per ogni curva rettificabile $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ di lunghezza $l(\gamma)$. Provare che $f \equiv 0$.

Dire poi se la stessa conclusione resta valida quando la precedente diseguaglianza è soddisfatta, anziché per ogni curva γ, solo per:

i) tutti i segmenti γ;

ii) tutte le semi-circonferenze γ;

iii) tutte le semi-ellissi γ.

Esercizio D1

Sia Oxy un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in un piano verticale, con l'asse delle ordinate diretto come la verticale ascendente.
Lungo l'asse delle ordinate e' libero di scorrere senza attrito un punto materiale P_1 di massa m_1; inoltre il punto P_1 e' il centro di una circonferenza $\mathcal{C}$ priva di massa e di raggio l su cui si muove senza attrito un altro punto materiale P_2 di massa $m_2 > m_1$.
I punti P_1 e P_2 sono legati all'origine O mediante due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.
Si denoti con y l'ordinata di P_1 e con ϕ l'angolo che $\overline{P_1P_2}$ forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Determinare le posizioni di equilibrio.
3. Studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha = \frac{(m_2-m_1)g}{kl}$, $\alpha \neq 1$.
4. Enunciare il criterio di Dirichlet per la stabilita' delle posizioni di equilibrio di un sistema meccanico conservativo.

Esercizio D2

Si consideri una particella quantistica in dimensione uno soggetta ad una evoluzione libera descritta dall'Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$$

dove si e' posto $m = \hbar = 1$, e si supponga che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Dimostrare che

$$\psi_t(x) \equiv \left(e^{-itH_0}\psi_0\right)(x) = \frac{e^{i\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{it}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t^2}}}{\pi^{1/4}} + \alpha_t(x)$$

   dove $\lim_{t\to\infty} \|\alpha_t\|_{L^2} = 0$.

   (Si ricordi che $e^{-itH_0}(x-y) = \frac{e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi i t}}$).

2. Facendo uso della rappresentazione di ψ_t mediante la trasformata di Fourier, verificare che la quantita'

$$\frac{1 - |(\psi_0, \psi_t)|^2}{t^2}$$

   ha un limite finito per $t \to 0$.

   (Si ricordi che $\tilde{\psi}_0(k) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{k^2}{2}}$, dove $\tilde{f}$ denota la trasformata di Fourier di f).

Esercizio E1

Sia $\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i = 0, 1\} = \{0, 1\}^{\otimes n}$ il prodotto cartesiano n-volte dello spazio di base $\{0, 1\}$ (un elemento $\omega \in \Omega_n$ e' una sequenza lunga n costituita da 0 ed 1).

a) Dare esempi di misure di probabilità su Ω_n. Costruire misure di probabilità tali che

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \omega_i > \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Si definisca su Ω_n la relazione di ordine parziale

$$\omega \geq \omega' \quad se \quad \omega_i \geq \omega_i' \quad \forall i = 1, \ldots .n.$$

Dato un elemento $\tilde{\omega} \in A_k$, dimostrare che

$$P\Big(\{\omega : \omega \geq \tilde{\omega}\} \cap \left(\cup_{j=k}^{n} A_j\right) \Big) \geq P\Big(\{\omega : \omega \geq \tilde{\omega}\} \Big) P\Big(\cup_{j=k}^{n} A_j \Big)$$

per ogni misura di probabilità.

b) Si consideri su Ω_n la misura di probabilità $\mu_p^{\otimes n}$ prodotto di misure di Bernoulli di parametro p. Calcolare

$$P_{\mu_p^{\otimes n}}\Big(\{\omega : \omega \geq \tilde{\omega}\} \Big)$$

Dare una stima dall'alto ($\leq$) utilizzando la disuguaglianza di Jensen di

$$E_{\mu_p^{\otimes n}}\left[\log\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\right)\right].$$

Calcolare

$$\psi(z) = E_{\mu_p^{\otimes n}}\left(z^{\sum_{i=1}^{n}\omega_i}\right); \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P_{\mu_{\frac{\lambda}{n}}^{\otimes n}}(A_k); \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} P_{\mu_p^{\otimes n}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\omega_i - p)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{4}\right).$$

Abbiamo indicato con $E_{\mu_p^{\otimes n}}$ e con $P_{\mu_p^{\otimes n}}$ rispettivamente il valore di aspettazione e la probabilità rispetto alla misura $\mu_p^{\otimes n}$.