Compito 2

Dottorato di Ricerca in Matematica – XXI ciclo

L'Aquila, 17 ottobre 2005

Il candidato risolva alcuni degli esercizi tra i seguenti, scegliendoli preferibilmente non tutti nello stesso settore (A, B, C, D, E).

Esercizio A1

1. Enunciare il Teorema Egregium di Gauss.

2. Dire, giustificando la risposta se le seguenti superfici di $\mathbb{R}^3$ sono localmente isometriche:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$$

3. Considerare le superfici in $\mathbb{R}^3$ parametrizzate nel modo seguente:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u) \quad (u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

$$\mathbf{y}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad (u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

Mostrare che tali superfici hanno la stessa curvatura di Gauss nei punti $\mathbf{x}(u, v)$ e $\mathbf{y}(u, v)$.

Esercizio A2

Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ le curve algebriche C e D di equazione omogenea

$$C: \quad (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_0x_2(x_1^2 + x_2^2) - x_0^2x_1^2 = 0$$

$$D: \quad x_1^2 + x_2^2 - x_0x_2 = 0$$

1. Trovare i punti di intersezione tra C e D.
2. Dire (giustificando la risposta) se tali punti di intersezione sono punti singolari per C.
3. Trovare le rette tangenti a C nei suoi punti di intersezione con D.

Esercizio B1

Sia R un anello commutativo con l'unitá e $I \subseteq R$ un ideale.

1. Sia $\sqrt{I} = \{r \in R \mid r^n \in I$ per qualche $n > 0\}$. Dimostrare che $\sqrt{I}$ é un ideale di R tale che $I \subseteq \sqrt{I}$.
2. Dimostrare che $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Sia $P \subseteq R$ un ideale primo. Dimostrare che $\sqrt{P} = P$.

Esercizio B2

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che

$$T^3 - T^2 - 4T + 4I = 0$$

ove I é l'applicazione identica, 0 é l'applicazione nulla, $T^2 = T \circ T$ e $T^3 = T \circ T \circ T$. Dimostrare che T é diagonalizzabile.

Esercizio C1

In $L^2(\mathbb{R})$ si consideri l'operatore $A: \ f \longrightarrow \tilde{f}$, dove

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(x+k).$$

Si dimostri che A è ben definito (cioè che la serie assegnata converge in $L^2(\mathbb{R})$ per ogni funzione f) e che è limitato.

Dimostrare poi che A non è compatto ed individuarne lo spettro.

Esercizio C2

Sia f una funzione continua, $f: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica la seguente diseguaglianza:

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad h > 0.$$

Dimostrare che:

i) Il massimo di f su ogni intervallo chiuso viene assunto in uno degli estremi dell'intervallo;

ii) f è convessa.

Esercizio C3

Si consideri il problema

$$\begin{cases} -y'' + (\sin x)^2 \ y = \lambda y \\ y(x) = y(x + 2\pi) \qquad\qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dimostrare che il problema ha una successione di soluzioni $\{(\lambda_n, \ y_n)\}$ tali che $\{y_n\}$ sia un sistema ortonormale completo in $L^2(2\pi)$.

Esercizio D1

Sia Oxy un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in un piano verticale, con l'asse delle ordinate diretto come la verticale ascendente.

Lungo l'asse delle ordinate e' libero di scorrere senza attrito un punto materiale P_1 di massa m_1; inoltre il punto P_1 e' il centro di una circonferenza $\mathcal{C}$ priva di massa e di raggio l su cui si muove senza attrito un altro punto materiale P_2 di massa $m_2 < m_1$.
I punti P_1 e P_2 sono legati all'origine O mediante due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.
Si denoti con y l'ordinata di P_1 e con ϕ l'angolo che $\overline{P_1P_2}$ forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

1. Scrivere la lagrangiana del sistema.
2. Determinare le posizioni di equilibrio.
3. Studiare la stabilita' delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha = \frac{(m_2-m_1)g}{kl}$, $\alpha \neq 1$.
4. Trovare le frequenze delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio che si ottiene per $\phi = \frac{\pi}{2}$ e determinare le condizioni sui parametri per cui il moto linearizzato e' periodico.

Esercizio D2

Si consideri una particella quantistica in dimensione uno soggetta ad una evoluzione libera descritta dall'Hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$$

dove si e' posto $m = \hbar = 1$, e si supponga che al tempo $t = 0$ la particella si trovi nello stato

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Dimostrare che

$$\psi_t(x) \equiv \left(e^{-itH_0}\psi_0\right)(x) = \frac{e^{i\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{it}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t^2}}}{\pi^{1/4}} + \alpha_t(x)$$

   dove $\lim_{t\to\infty} \|\alpha_t\|_{L^2} = 0$.

   (Si ricordi che $e^{-itH_0}(x-y) = \frac{e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi it}}$).

2. Facendo uso del risultato del punto (1), verificare che la probabilita' di trovare la particella nell'intervallo $(-1, 1)$ tende a zero per $t \to \infty$.

Esercizio E1

Sia $\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i = 0, 1\} = \{0,1\}^{\otimes n}$ il prodotto cartesiano n-volte dello spazio di base $\{0,1\}$ (un elemento $\omega \in \Omega_n$ e' una sequenza lunga n costituita da 0 ed 1).

a) Calcolare $|\Omega_n|$ ($|\cdot|$ e' la cardinalità di $\cdot$) e $|\mathcal{P}(\Omega_n)|$ ($\mathcal{P}(\cdot)$ e' l'insieme delle parti di $\cdot$). Sia $A_k = \{\omega \in \Omega_n : \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}$, calcolare $|A_k|$. Calcolare la cardinalità del sottoinsieme di Ω_n costituito dalle sequenze che appartengono ad A_3 e che non hanno 1 in posizioni adiacenti.

b) Dare esempi di misure di probabilità su Ω_n. Costruire misure di probabilità tali che

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i > \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Si definisca su Ω_n la relazione di ordine parziale

$$\omega \geq \omega' \quad se \quad \omega_i \geq \omega'_i \quad \forall i = 1, \ldots . n.$$

Dato un elemento $\tilde{\omega} \in A_k$, dimostrare che

$$P\Big(\{\omega : \omega \geq \tilde{\omega}\} \cap \left(\cup_{j=k}^n A_j\right)\Big) \geq P\Big(\{\omega : \omega \geq \tilde{\omega}\}\Big) P\Big(\cup_{j=k}^n A_j\Big)$$

per ogni misura di probabilità.