Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. - (Foschi)
Soluzioni della prova parziale del 31 ottobre 2003.

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si discuta al variare di $\alpha > 0$, la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$.

Verifichiamo prima di tutto se esistono le derivate parziali nel punto $(0,0)$. La derivata rispetto ad x è data dal limite

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{(h^2)^\alpha h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sgn}(h)|h|^{1-2\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \nexists, & \text{se } \alpha = \dfrac{1}{2}, \\ \infty, & \text{se } \alpha > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

La derivata rispetto ad y è data dal limite

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(k,0) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^3}{(k^2)^\alpha k} = \lim_{k\to 0} |k|^{2-2\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ 1, & \text{se } \alpha = 1, \\ \infty, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dunque esistono entrambe le derivate parziali solo per $0 < \alpha < 1/2$. La funzione è differenziabile se vale il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \partial_x f(0,0) h \partial_y f(0,0) k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Quando $0 < \alpha < 1/2$, tale limite si riduce a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 - k^3}{(h^2+k^2)^(\alpha + 1/2} = 0.$$

Usando coordinate polari $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$ abbiamo

$$\frac{h^2 - k^3}{(h^2+k^2)^(\alpha + 1/2} = \frac{r^2}{r^{2\alpha+1}} \left((\cos\theta)^2 - r(\sin\theta)^3 \right)$$

e dunque, essendo $|\cos\theta|, |\sin\theta| < 1$,

$$\left| \frac{h^2 - k^3}{(h^2+k^2)^(\alpha + 1/2} \right| \leq r^{1-2\alpha}(1+r).$$

Per $\alpha < 1/2$, l'espressione di destra è indipedente da θ e tende a zero quando $r \to 0$ e dunque il limite è verificato.

Esercizio 2. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x,y) = \left(x^2 - \cos(\pi y),\ \log(1 + x^2y^2),\ \sqrt{1+x^2} \right),$$
$$g(u,v,w) = \sin(uv) + ue^w.$$

Si consideri la composizione $h = g \circ f$. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $z = h(x,y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Osserviamo che $f(1,0) = (0, 0, \sqrt{2})$. Calcoliamo la matrice jacobiana di f,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x, & \pi\sin(\pi y) \\ \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}, & \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} \\ \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}, & 0 \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(1,0)$ essa vale

$$J_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 0 \\ \sqrt{2}, & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice jacobiana di g,

$$J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} v\cos(uv) + e^w, & u\cos(uv), & ue^w \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(0,0,\sqrt{2}) = f(1,0)$ essa vale

$$J_g(0,0,\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}}, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobiana di $h = g \circ f$ nel punto $(1,0)$, per la regola di differenziazione delle funzioni composte, è data dal prodotto delle due matrici,

$$J_h(1,0) = J_g(0,0,\sqrt{2})J_f(1,0) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}}, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 0 \\ \sqrt{2}, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{\sqrt{2}}, & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò significa che $\partial_x h(1,0) = 2e^{\sqrt{2}}$, $\partial_y h(1,0) = 0$. Inoltre $h(1,0) = g(0,0,\sqrt{2}) = 0$. Il piano tangente al grafico di h nel punto $(1,0)$ ha equazione

$$z = h(1,0) + \partial_x h(1,0)(x-1) + \partial_y h(1,0)(y-0),$$

ovvero

$$z = 2e^{\sqrt{2}}(x-1).$$

Esercizio 3. Si studino i punti critici delle curve $x = f(y)$ definite implicitamente dall'equazione $F(x,y) = 0$, dove

$$F(x,y) = x^4 - y^4 + x^2y^2 - x^2.$$

Si provi a tracciare un grafico qualitativo di tali curve.

Come premessa, osserviamo che F è espressa come funzione di x^2 e y^2, dunque valgono le seguenti simmetrie:

$$\begin{aligned}
&F(x,y) = F(x,-y) = F(-x,y) = F(-x,-y), \\
&\partial_x F(x,y) = \partial_x F(x,-y) = -\partial_x F(-x,y) = -\partial_x F(-x,-y), \\
&\partial_y F(x,y) = -\partial_y F(x,-y) = \partial_y F(-x,y) = -\partial_y F(-x,-y), \\
&\partial^2_{xx} F(x,y) = \partial^2_{xx} F(x,-y) = \partial^2_{xx} F(-x,y) = \partial^2_{xx} F(-x,-y), \\
&\partial^2_{xy} F(x,y) = \partial^2_{xy} F(x,-y) = \partial^2_{xy} F(-x,y) = \partial^2_{xy} F(-x,-y), \\
&\partial^2_{yy} F(x,y) = \partial^2_{yy} F(x,-y) = \partial^2_{yy} F(-x,y) = \partial^2_{yy} F(-x,-y).
\end{aligned}$$

È sufficiente pertanto studiare la funzione nel quadrante $(x \geq 0, y \geq 0)$ e ricostruire ciò che avviene negli altri quadranti tramite le simmetrie riportate sopra.

Calcoliamo le derivate parziali di F che ci serviranno in seguito:

$$\begin{aligned}
&\partial_x F(x,y) = 4x^3 + 2xy^2 - 2x = 2x(2x^2 + y^2 - 1), \\
&\partial_y F(x,y) = -4y^3 + 2x^2y = -2y(2y^2 - x^2) = 0, \\
&\partial^2_{xx} F(x,y) = 12x^2 + 2y^2 - 2, \\
&\partial^2_{xy} F(x,y) = 4xy, \\
&\partial^2_{yy} F(x,y) = -12y^2 + 2x^2.
\end{aligned}$$

Possiamo ricavare x in funzione di y in corrispondenza dei punti in cui non si annulla la derivata parziale di F rispetto ad x. Tale derivata vale si annulla sui punti dell'asse y di equazione $x = 0$ e sui punti dell'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 = 1$. Se $x = f(y)$ è definita implicitamente da $F(x,y) = 0$ allora la sua derivata è data dal rapporto $-\partial_y F/\partial_x F$. I punti critici di f corrispondono dunque alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -2y(2y^2 - x^2) = 0, \\ x^4 - y^4 + x^2y^2 - x^2 = 0. \end{cases}$$

escludendo i punti in cui si annulla $\partial_x F(x, y)$. Per via della fattorizzazione della prima equazione possiamo distinguere due casi:

- se $y = 0$, allora $x^4 - x^2 = 0$, che ha come soluzioni $x = 0$ e $x = \pm 1$, corrispondenti ai punti critici $(0, 0)$ e $(\pm 1, 0)$;
- se $y \neq 0$, allora $x^2 = 2y^2$ e di conseguenza

  $$(2y^2)^2 - y^4 + (2y^2)y^2 - (2y^2) = 0,$$

  che si riduce a $5y^4 - 2y^2 = 0$ e che ha come soluzioni $y = \pm\sqrt{2/5}$, corrispondenti ai punti critici $(\pm 2/\sqrt{5}, \pm\sqrt{2/5})$.

Il punto $(0, 0)$ lo scartiamo in quanto $\partial_x F(0, 0) = 0$. Per capire il carattere del punto $(1, 0)$ guardiamo alla derivata seconda

$$f''(1) = -\frac{\partial^2_{yy} F(1, 0)}{\partial_x F(1, 0)} = -\frac{2}{2} = -1 < 0,$$

quindi, nel punto $(1, 0)$ abbiamo un massimo per $y = f(x)$; per simmetria avremo nel punto $(-1, 0)$ un minimo per $y = f(x)$. Il carattere del punto $(2/\sqrt{5}, \sqrt{2/5})$ è dato dalla derivata seconda

$$f''(2/\sqrt{5}) = -\frac{\partial^2_{yy} F(2/\sqrt{5}, \sqrt{2/5})}{\partial_x F(2/\sqrt{5}, \sqrt{2/5})} = -\frac{-16/5}{8/(5\sqrt{5})} = 2\sqrt{5} > 0,$$

quindi, nel punto $(2/\sqrt{5}, \sqrt{2/5})$ abbiamo un minimo per $y = f(x)$; per simmetria avremo: nel punto $(-2/\sqrt{5}, \sqrt{2/5})$ un massimo, nel punto $(2/\sqrt{5}, -\sqrt{2/5})$ un minimo, nel punto $(-2/\sqrt{5}, -\sqrt{2/5})$ un massimo.

Esercizio 4. Calcolare i valori massimo e minimo che la funzione F definita nell'esercizio precedente assume al variare di (x, y) nell'insieme

$$A = \left\{(x, y) : 1/5 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

Rimangono validi la premessa fatta nell'esercizio precedente riguardo le simmetrie di F e i calcoli delle derivate parziali di F.

Cerchiamo prima i punti critici liberi di F, ovvero i punti in cui si annullano simultaneamente le derivate prime. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x(2x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ -2y(2y^2 - x^2) = 0. \end{cases}$$

Distinguiamo alcuni casi:

- se $x = 0$, allora necessariamente $y = 0$;
- se $y = 0$, allora $2x(2x^2 - 1) = 0$ e dunque $x = 0$ oppure $x = \pm 1/\sqrt{2}$;
- se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, allora otteniamo

  $$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1, \\ -x^2 + 2y^2 = 0, \end{cases}$$

  da cui si ricava che $x^2 = 2/5$, $y^2 = 1/5$, per cui $x = \pm\sqrt{2/5}$, $y = \pm 1/\sqrt{5}$.

Abbiamo così trovato i punti critici $(0,0)$, $(\pm 1/\sqrt{2},0)$, $(\pm\sqrt{2/5},\pm 1/\sqrt{5})$. Il punto $(0,0)$ non appartiene alla regione A e pertanto non lo consideriamo, negli altri punti abbiamo

$$F(\pm 1/\sqrt{2},0) = -\frac{1}{4}, \qquad F(\pm\sqrt{2/5},\pm 1/\sqrt{5}) = \frac{9}{25}.$$

Esaminiamo ora i punti critici vincolati alle due circonferenze che costituiscono il bordo di A.

Il massimo e il minimo di F quando (x,y) è vincolato a stare sulla circonferenza $x^2+y^2=2$ lo possiamo trovare con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange. Posto

$$L(x,y,\lambda) = (x^4-y^4+x^2y^2-x^2)+\lambda(x^2+y^2-2).$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \partial_x L = 4x^3+2xy^2-2x+2\lambda x = 0, \\ \partial_y L = -4y^3+2x^2y+2\lambda y = 0, \\ \partial_\lambda L = x^2+y^2-2 = 0. \end{cases}$$

- Se $x=0$ allora $y=\pm\sqrt{2}$.
- Se $y=0$ allora $x=\pm\sqrt{2}$.
- Se $x\neq 0$ e $y\neq 0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+\lambda = 1, \\ x^2-2y^2+\lambda = 0, \\ x^2+y^2 = 2. \end{cases}$$

  Sottraendo la seconda e la terza dalle prima otteniamo $2y^2=-1$ che non ha soluzioni. Dunque il sistema in questo caso è impossibile.

Abbiamo così trovato i punti critici $(0,\pm\sqrt{2})$ e $(\pm\sqrt{2},0)$, in corrispondenza dei quali abbiamo

$$F(0,\pm\sqrt{2}) = -4, \qquad F(\pm\sqrt{2},0) = 2.$$

Per trovare il massimo e il minimo di F quando (x,y) è vincolato a stare sulla circonferenza $x^2+y^2=1/5$ poniamo

$$L(x,y,\lambda) = (x^4-y^4+x^2y^2-x^2)+\lambda\left(x^2+y^2-\frac{1}{5}\right).$$

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \partial_x L = 4x^3+2xy^2-2x+2\lambda x = 0, \\ \partial_y L = -4y^3+2x^2y+2\lambda y = 0, \\ \partial_\lambda L = x^2+y^2-\dfrac{1}{5} = 0. \end{cases}$$

- Se $x=0$ allora $y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- Se $y=0$ allora $x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- Se $x\neq 0$ e $y\neq 0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+\lambda = 1, \\ x^2-2y^2+\lambda = 0, \\ x^2+y^2 = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

  Sottraendo la seconda e il triplo della terza dalla prima otteniamo $-2x^2 = 2/5$ che non ha soluzioni. Dunque il sistema in questo caso è impossibile.

Abbiamo così trovato i punti critici $(0, \pm 1/\sqrt{5})$ e $(\pm 1/\sqrt{5}, 0)$, in corrispondenza dei quali abbiamo

$$F\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{25}, \qquad F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) = -\frac{4}{25}.$$

Fra tutti i valori che la F assume tra i punti critici liberi nell'interno di A e vincolati al bordo di A il valore massimo viene raggiunto in

$$F(\pm\sqrt{2}, 0) = 2,$$

mentre il valore minimo corrisponde a

$$F(0, \pm\sqrt{2}) = -4.$$

Esercizio 5. Al variare di $\alpha \geq 0$ si discuta il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\alpha} (1 + \log(n))$$

Abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)}{(\sqrt{n})^2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

Ora usiamo il fatto che $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + o(t)$ per $t \to 0$. Nel nostro caso $t = 1/n$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)}{n^{1/2}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = n^{-3/2}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Inoltre $1+\log(n) \approx \log(n)$ per $n \to \infty$. Dunque abbiamo il seguente comportamento asintotico per i termini della nostra serie,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\alpha} (1 + \log(n)) \approx n^{-(3/2)\alpha} \log(n).$$

- Se $\alpha > 2/3$, utilizziamo il fatto che per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo $\log(n) \leq n^{\varepsilon}$ per $n \to \infty$. Dunque, scegliendo $\varepsilon < (3/2)\alpha - 1$, otteniamo
$$n^{-(3/2)\alpha} \log(n) \leq n^{-(3/2)\alpha+\varepsilon}.$$
Essendo l'esponente $-(3/2)\alpha + \varepsilon < -1$, l'espressione di destra descrive i termini di una serie armonica generalizzata convergente. Per confronto, anche l'espressione di sinistra descrive i termini di una serie convergente. Per confronto asintotico la nostra serie converge.
- Se $\alpha \leq 2/3$, utilizziamo il fatto che abbiamo $\log(n) \geq 1$ per $n \to \infty$. Otteniamo
$$n^{-(3/2)\alpha} \log(n) \geq n^{-(3/2)\alpha}.$$
Essendo l'esponente $-(3/2)\alpha \geq -1$, l'espressione di destra descrive i termini di una serie armonica generalizzata divergente. Per confronto, anche l'espressione di sinistra descrive i termini di una serie divergente. Per confronto asintotico la nostra serie diverge.