

**Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. (Foschi)**  
**9 dicembre 2003**

1. FORME DIFFERENZIALI

*Esercizio 1.1.* Calcolare l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} \omega$  nei seguenti casi:

- $\omega = \log(1+y) dx + \log(1+x) dy$  e  $\gamma$  è il segmento che congiunge il punto  $(1, 0)$  con il punto  $(0, 1)$ ;
- $\omega = (y+z) dx + (x+z) dy + (x+y) dz$  e  $\gamma$  è l'arco di elica cilindrica parametrizzato da  $x(t) = 2 \cos t$ ,  $y(t) = 2 \sin t$ ,  $z(t) = 3t$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ ;
- $\omega = \frac{1}{1+y^2} dx - \frac{2xy}{(1+y^2)^2} dy$  e  $\gamma$  è la curva parametrizzata da  $x(t) = e^{\sin t}$ ,  $y(t) = \frac{2 \cos t}{1+(\cos t)^2}$ , con  $t \in [0, \pi]$ .

*Esercizio 1.2.* Riconoscere se le seguenti forme differenziali sono esatte e, in caso affermativo, determinare una loro primitiva:

- $x dx + (y - 1) dy$  in  $\mathbb{R}^2$ ;
- $y dx + x dy$  in  $\mathbb{R}^2$ ;
- $x dy - y dx$  in  $\mathbb{R}^2$ ;
- $\frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ;
- $(y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$  in  $\mathbb{R}^3$ .

*Esercizio 1.3.* Determinare tutte le forme differenziali esatte su  $\mathbb{R}^2$  della forma  $A(y) dx + B(x) dy$ , con  $A$  e  $B$  di classe  $C^1$ .

*Esercizio 1.4.* Determinare il valore del parametro  $k$  per il quale la forma differenziale

$$\omega = (x^2 - y^2) dx + kxy dy$$

risulta essere chiusa, e dunque esatta, su  $\mathbb{R}^2$ . In corrispondenza di tale valore determinare una primitiva di  $\omega$ .

*Esercizio 1.5.* Determinare delle funzioni  $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in modo che le forme differenziali

$$\begin{aligned}\omega_1 &= y^2 e^x dx + \varphi(y) e^x dy, \\ \omega_2 &= \psi(y) e^x dx + y^2 e^x dy,\end{aligned}$$

risultino essere chiuse, e dunque esatte, su  $\mathbb{R}^2$ . Determinare inoltre delle primitive di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

## 2. INTEGRALI DI SUPERFICIE

*Esercizio 2.1.* Si dimostri che la superficie di una sfera di raggio  $R$  in  $\mathbb{R}^3$  ha un'area di  $4\pi R^2$  e che il suo momento di inerzia (della sfera, non della palla) rispetto ad un suo diametro vale  $\frac{8\pi}{3}R^4$ .

*Esercizio 2.2.* Calcolare l'area della superficie del toro ottenuto facendo ruotare attorno all'asse  $z$  il cerchio del piano  $(x, z)$  che ha centro nel punto  $(x_0, z_0) = (a, 0)$  e raggio  $b$ , dove  $0 < b < a$ .

*Esercizio 2.3.* Calcolare  $\iint_{\Omega} x^2 d\sigma$ , dove  $\Omega$  è la porzione della superficie di equazione  $z = \arctan(y/x)$  che si trova al di sopra dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 2\}.$$

*Esercizio 2.4.* Calcolare

$$\iint_P \frac{d\sigma}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

dove  $P$  è il piano di equazione  $Ax + By + Cz = D$ , con  $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$  e  $D \neq 0$ .

*Esercizio 2.5.* Sia  $S$  la porzione della superficie conica  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  interna al cilindro  $x^2 + y^2 = 2x$ . Calcolare il valore dell'integrale superficiale

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) d\sigma.$$

*Esercizio 2.6.* Determinare il flusso del campo  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  uscente dalla superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , con  $R > 0$ .

*Esercizio 2.7.* Il campo vettoriale  $V(x, y, z) = (x, -2x - y, z)$  descrive la velocità di un fluido di densità omogenea  $\rho$ . Sia  $T$  il triangolo piano di vertici  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Calcolare la massa del fluido passante attraverso  $T$  nell'unità di tempo.

*Esercizio 2.8.* Si consideri la superficie  $S$  rappresentata dalla porzione del grafico della funzione

$$z = h(x, y) = x^2 + \sqrt{3}y,$$

che si trova all'interno della regione in cui  $0 \leq y \leq x \leq 1$ , e orientata dalla normale con terza componente positiva. Si consideri inoltre la funzione  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Calcolare gli integrali

$$\iint_S \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) d\sigma, \quad \iint_S \|\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)\| d\sigma.$$

*Esercizio 2.9.* Sia  $S$  la superficie rappresentata dalla porzione del grafico della funzione

$$z = h(x, y) = 3x^2 + \sqrt{3}y,$$

che si trova all'interno della regione in cui  $0 \leq x \leq y \leq 1$ . Si consideri il campo vettoriale  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da:

$$F(x, y, z) = (x^3, x^2 + y^2, x + y + z).$$

Calcolare i seguenti integrali di superficie:

$$\iint_S \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) \, d\sigma, \quad \iint_S \|\operatorname{grad}(\operatorname{div} F)\| \, d\sigma.$$

*Esercizio 2.10.* Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+r^2}, \frac{y}{1+r^2}, \frac{z}{1+r^2} \right),$$

dove  $r = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Per ogni  $R > 0$  sia  $B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |(x, y, z)| \leq R\}$  la palla di centro l'origine e raggio  $R$ . Calcolare il limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \iiint_{B_R} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

[Suggerimento: applicando il teorema della divergenza i calcoli si semplificano]