Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. (Foschi)
25 novembre 2003

1. Integrali multipli

Esercizio 1.1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

- $\displaystyle\iint_{|x|+|y|<1} \big(4x^2y^3 - x + 5\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$;
- $\displaystyle\iint_{x^2+y^2<1} \big(4x^2y^3 - x + 5\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$;
- $\displaystyle\iint_A xy^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove A è la regione finita delimitata dalle parabole $y = x^2$ e $x = y^2$;
- $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove Ω è la regione definita dalle condizioni: $0 < y < x < \pi/2$;
- $\displaystyle\iint_S xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove S è la regione del piano definita da: $0 \le y \le x$ e $x^2 + y^2 \le R^2$, per un dato $R > 0$;
- $\displaystyle\iint_{|x|+|y|<L} e^{x+y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, con $L > 0$.

Esercizio 1.2. Sia $R > 0$. Determinare la distanza media dell'origine $(0,0)$ dai punti del disco $x^2 + y^2 \le R^2$.

Esercizio 1.3. Siano $0 < A < B$. Determinare il valore medio d ella funzione $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, sulla regione anulare $A^2 < x^2 + y^2 < B^2$.

Esercizio 1.4. Calcolare i seguenti integrali tripli:

- $\displaystyle\iiint_T x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, dove T è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,a^2,0)$, $(0,0,a^3)$, con $a > 0$ fissato;
- $\displaystyle\iiint_A (x^2+y^2)z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, dove A è il cilindro: $0 \le x^2 + y^2 \le 2$, $0 \le z \le 3$;
- $\displaystyle\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, dove B è la regione che sta sopra il cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e dentro la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 2.

Esercizio 1.5. Siano $a, b, c > 0$. Calcolare il volume della regione interna all'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

[Suggerimento: con una trasformazione lineare riportarsi al caso di una sfera, poi usare coordinate sferiche.]

Esercizio 1.6. Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x la curva parametrizzata da: $x = t$, $y = e^{-x^2}$, $z = 0$.

Esercizio 1.7. Si calcoli il seguente integrale:

$$\iint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x},$$

dove Ω è la regione ottenuta rimuovendo dal disco di centro $(2,0)$ e raggio 2 il disco di centro $(1,0)$ e raggio 1.

Esercizio 1.8. Si determini per quale valore del parametro $a > 0$ l'insieme

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq y + a\right\}$$

ha volume uguale ad 1.

Esercizio 1.9. Sia $A = [-a,a] \times [-2,2]$, con $a > 1$; sia $B = [-1+b, 1+b] \times [-1,1]$, con $0 < b < a-1$. Determinare il baricentro di $A \setminus B$ (supponendo densità di massa costante e uguale ad 1).

Esercizio 1.10. Calcolare il centro di massa e momento di inerzia rispetto all'origine, del disco $x^2 + y^2 \leq 4y$ in $\mathbb{R}^2$, supponendo che la densità di ogni punto sia uguale al quadrato della distanza del punto dall'origine.

Esercizio 1.11. Determinare baricentro e momento di inerzia rispetto al proprio asse di un cono di altezza h e raggio a, fatto di un materiale la cui densità è proporzionale alla distanza dalla base.

Esercizio 1.12. Determinare il momento di inerzia di un disco in $\mathbb{R}^2$ di centro (x_c, y_c), raggio $R > 0$ e densità omogenea $\rho > 0$, rispetto alla retta di equazione $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(a,b) \neq (0,0)$.

Esercizio 1.13. Determinare il centro di massa e il momento di inerzia rispetto all'asse z del solido ottenuto rimuovendo dalla semisfera

$$S = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$$

il cono

$$C = \left\{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\},$$

supponendo densità costante e uguale a uno.

Esercizio 1.14. Si calcoli l'integrale $\iint_\Omega \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove Ω è la regione finita nel primo quadrante del piano xy, delimitata dalle rette $x = 2y$, $2x = y$ e dalle iperboli $xy = 1$ e $xy = 2$. [Suggerimento: cercare prima un cambiamento di coordinate che trasformi Ω in un rettangolo.]

Esercizio 1.15. Si calcoli l'integrale $\iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove Ω è la regione finita del piano xy, delimitata dalle curve esponenziali di equazioni

$$y = e^x, \quad y = 3e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 2e^{-x}.$$

2. Integrali curvilinei

Esercizio 2.1. Sia $\mathcal{C}$ la curva in $\mathbb{R}^2$ parametrizzata da $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, con t compreso tra 0 e 2π.

- Determinare la lunghezza di $\mathcal{C}$.
- Riparametrizzare $\mathcal{C}$ usando la lunghezza d'arco.

Esercizio 2.2. Per ciascuna delle seguenti curve in $\mathbb{R}^3$, riparametrizzare la curva data, con la stessa orientazione, per mezzo della lunghezza d'arco misurata dal punto in cui $t = 0$.

- $t \mapsto (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$;
- $t \mapsto \big((\cos t)^3, (\sin t)^3, 3\cos(2t)\big)$, $t \in [0, 2\pi]$;
- $t \mapsto (3t\cos t, 3t\sin t, 2\sqrt{2}t^{3/2})$, $t \in [0, +\infty[$.

Esercizio 2.3. Mostrare che la curva $\mathcal{C}$ in R^3 parametrizzata da

$$x = \cos t \sin t, \quad y = (\sin t)^2, \quad z = \cos t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

giace sulla sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1. Determinare il valore dell'integrale $\int_{\mathcal{C}} z \,\mathrm{d}s$.

Esercizio 2.4. Determinare il valore del momento di inerzia attorno all'asse z, ovvero il valore di $\int_{\mathcal{C}}(x^2+y^2)\rho \,\mathrm{d}s$, per un filo di densità costante ρ che giace lungo la curva $\mathcal{C}$ parametrizzata da $t \mapsto (e^t\cos t, e^t \sin t, t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare inoltre anche $\int_{\mathcal{C}} e^z \,\mathrm{d}s$.

Esercizio 2.5. Calcolare il lavoro compiuto dai seguenti campi vettoriali F lungo le curve $\mathcal{C}$ indicate:

- $F(x, y) = (xy, x^2)$, lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazione $y = x^2$, dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 1)$;
- $F(x, y) = (\cos x, y)$, lungo la curva $\mathcal{C}$ di equazione $y = \sin x$, dal punto $(0, 0)$ al punto $(\pi, 0)$;
- $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, lungo la curva $\mathcal{C}$ ottenuta come intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $z = y$, dal punto $(-1, 0, 0)$ al punto $(1, 0, 0)$, percorrendola in entrambe le direzioni.

Esercizio 2.6. Calcolare il baricentro di un filo omogeneo a forma di cicloide descritto dalle equazioni parametriche $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 2.7. Si consideri la curva $\gamma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^3$ descritta dalla parametrizzazione:

$$x(t) = e^{-t}\cos t, \quad y(t) = e^{-t}\sin t, \quad z(t) = e^{-t},$$

quando t varia da 0 a $+\infty$. Calcolare la lunghezza L di γ e il suo momento di inerzia rispetto all'asse z. Determinare inoltre un cambio di variabile $\phi : [0, L[\to [0, +\infty[$, $t = \phi(s)$, in modo che $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s))$ sia una riparametrizzazione di γ secondo lunghezza d'arco.