Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. (Foschi) - 11 novembre 2003.

1. Serie di funzioni

Esercizio 1.1. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(1 + x^2 e^{-nx^2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

studiarne la convergenza puntuale e determinare su quali intervalli di $\mathbb{R}$ la convergenza è uniforme.

Esercizio 1.2. Discutere la convergenza puntuale, uniforme, totale, delle seguenti serie ed eventualmente calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} e^{nx}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{n \log n},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(x) e^{n \sin(x)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n^2 \sin(x)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \arctan(n + x^2)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan(n) - x^2}{n^2 \sqrt{n} + x^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{e^x}{n\sqrt{n}} + x^2\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{2n^3}.$$

Esercizio 1.3. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze ed eventualmente calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n+1}(x-1)^n \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n \arctan(e^n)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(\log(2+n))^{n^2+5}}.$$

Esercizio 1.4. Determinare lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ centrato nel punto x_0 nei seguenti casi:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = 1;$$
$$f(x) = \arctan(x), \qquad x_0 = 0;$$
$$f(x) = \int_0^x \log(1+y)\,\mathrm{d}y, \qquad x_0 = 0.$$

2. Equazioni differenziali

Esercizio 2.1. Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$y'' + 9y = 3\cos(4x), \qquad y'' + 5y' + 6y = e^{-x},$$
$$y'''' = y + x^4, \qquad y'' = 6y' - 9y + xe^{-x}.$$

Esercizio 2.2. Si determini la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + e^x y = e^x, \\ y(0) = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y''' + y'' = \sin(x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{6x(y^2+1)}{(x^2+1)^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2.3. Si determinino i primi 3 termini dello sviluppo di Taylor centrato in $t = 1$ della soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y' = \arctan(1 + t^2 + y^2)$$

tale che $y(1) = -1$.

Esercizio 2.4. Si tracci un grafico approssimativo delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

al variare di α in $\mathbb{R}$, nei seguenti casi:

$$f(x, y) = y^2 - xy, \qquad f(x, y) = \cos(x)(y^2 + 1),$$
$$f(x, y) = (x + 1)^2 y^2 + x^2, \qquad f(x, y) = \sin(y).$$

Esercizio 2.5. Si determini per quali valori di λ esistono soluzioni $u(t)$ non identicamente nulle dell'equazione $u'' + \lambda u = 0$ tali che $u'(0) = 0$ e $\int_0^\pi u(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Esercizio 2.6. Per i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sin(t)\sqrt{y}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = t^3\sqrt{1 - y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{t^2}{y} e^{-y^2}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

- stabilire se valgono i teoremi di esistenza e unicità sia locali che globali;
- determinare le soluzioni con il metodo di separazione delle variabili.