Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. (Foschi) - 28 ottobre 2003.

1. Serie numeriche

Esercizio 1.1. Trasformare in forma di serie i seguenti numeri decimali periodici e calcolarne la somma in forma di frazione:

$$5,050505050\ldots \qquad 0,123123123\ldots \qquad 0,999999999\ldots$$

Esercizio 1.2. Si calcoli *esattamente* la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 7^{2-n}, \qquad \sum_{n=100}^{\infty} \left(3^{1-n} - 3^{-n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1}\right),$$

$$\sum_{n=-5}^{\infty} e^{-n/2}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\sin\alpha)^{2n}.$$

Esercizio 1.3. Si discuta la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 999}{n^{999}+999}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}+1}{n^3+\sqrt[3]{n}+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)e^{1/\sqrt{k}} - k}{k^2 - \sqrt{k+1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{\sqrt{n}}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan n}{\sqrt{n^5+2}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(\cos n)^2}{n^3}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) \log\left(1+\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin(n)}{2+\sin(n^3)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-2}\right)^n, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right) \log\left(\frac{k^2+100}{2k+1}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{\sqrt[3]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right), \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \sin\left(\frac{e^{n^2}-1}{2n+1}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k)\log(1+k^2)}.$$

Esercizio 1.4. Si discuta la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^{-2+(-1)^k}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2-2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{(-2)^n}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\arctan\left((-2)^n\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^n\right).$$

Esercizio 1.5. Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Si dimostri che se la serie $\sum a_n$ è convergente allora convergono anche le serie

$$\sum_n \frac{a_n}{n}, \qquad \sum_n \sqrt[n]{n}\, a_n, \qquad \sum_n a_n x^n, \quad 0 \le x \le 1.$$

Esercizio 1.6. Matilde ha ricevuto in dono un set di cubetti di legno con cui giocare. Nel set ci sono tanti cubetti quanti sono i numeri naturali (cominciando da 1), e il lato del cubetto numero N misura $10/N$ centimetri. Se Matilde costruisce una torre mettendo un cubetto sopra l'altro quanto alta può diventare la torre? Se la mamma vuole mettere i cubetti a posto, è possibile che riesca a farli stare tutti dentro un cassetto del comò? Quanto spazio occupano tutti i cubetti?