Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. (Foschi) - 16 ottobre 2003.

1. Funzioni implicite

Esercizio 1.1. Trovare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione

$$(x-y)\log(e+xy-y^3)=2,$$

nel punto $(4,2)$.

Esercizio 1.2. Si determini lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine della funzione $y=f(x)$ definita implicitamente dall'equazione

$$y\log(x)-x\cos(y)=0$$

in un intorno del punto $(1,\pi/2)$.

Esercizio 1.3. Sia $F(x,y)=x^4+y^4-4x^2+4y^2$. Determinare i punti di massimo e minimo relativo delle funzioni del tipo $y=f(x)$ oppure $x=f(y)$ definite implicitamente dalle curve di livello $F(x,y)=0$ e $F(x,y)=1$. Con le informazioni ricavate si provi a disegnare tali curve di livello.

Esercizio 1.4. Sia S la superficie (in $\mathbb{R}^3$) definita implicitamente dall'equazione $xy^3+z^2=17$. Determinare l'equazione del piano tangente ad S nel punto $(1,2,3)$.

2. Massimi e minimi di funzioni di più variabili

Esercizio 2.1. Determinare e classificare i punti critici delle seguenti funzioni definite su $\mathbb{R}^2$:

$$x^2(y-x); \qquad (x^2+y^4)e^{-(x^2+y^4)}; \qquad \sin(x+y)-\cos(x-y);$$
$$x^2\sin(y); \qquad xy^2e^{-x^2-y^2}; \qquad e^{x^2(1-x)y}.$$

Esercizio 2.2. Determinare gli estremi dei valori che la funzione

$$f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$$

assume al variare di $x>0, y>0$.

Esercizio 2.3. Si calcoli il valore massimo che la funzione $f(x,y)=xy$ assume sull'insieme

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\le\frac{1}{a^2+x^2}\right\},$$

in funzione del parametro $a>0$.

Esercizio 2.4. Studiare i punti critici in $\mathbb{R}^3$ della funzione:

$$f(x,y,z)=x^2+y^4+y^2+z^3-2xz.$$

Esercizio 2.5. Determinare per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y,z)=\cos x-\alpha y^2-z^2+z$$

ammette almeno un punto di massimo relativo.

Esercizio 2.6. Calcolare i valori minimi e massimi che la funzione $f(x,y)=xy^2$ assume sulla circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio 1.

Esercizio 2.7. Calcolare la minima distanza di un punto dell'ellisse $x^2+4y^2=4$ dalla retta $x+2y=4$.

Esercizio 2.8. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = 2x + y + z$. Determinare l'immagine $f(A)$.

Esercizio 2.9. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione $(x, y, z) \mapsto xyz$ sull'ellissoide $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

Esercizio 2.10. Si vuole costruire un barattolo cilindrico senza coperchio. Il materiale per la base costa 100 lire al cm^2, mentre il materiale per la superficie laterale costa 50 lire al cm^2. Qual'è il volume massimo che possiamo ottenere per il nostro barattolo con un budget di 1000 lire?

Esercizio 2.11. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = xy + \frac{z^2}{2}.$$

Determinare il valore massimo e il valore minimo che la f assume sulla circonferenza ottenuta intersecando la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 con il piano di equazione $x + y + z = 1$.

Esercizio 2.12. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = z^2$. Determinare il valore massimo e il valore minimo che la f assume sulla ellisse ottenuta intersecando il paraboloide di equazione $z = x^2 + 2y^2$ con il piano $z = 3 - 2x - y$.

Esercizio 2.13. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = x - y.$$

Determinare il valore massimo e il valore minimo che f assume sulla circonferenza ottenuta intersecando la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 4$ con il piano di equazione $x + y + z = 3/2$.

3. Trasformazioni invertibili

Esercizio 3.1. Si consideri la funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

Si provi che T è localmente invertibile e si calcoli il valore del suo determinante jacobiano in ogni punto (x, y). Si osservi inoltre che T non è globalmente invertibile in quanto non è iniettiva.

Esercizio 3.2. Determinare in quali punti le seguenti trasformazioni sono localmente invertibili

$(x, y) \mapsto (\xi, \eta) = (x^2 - y^2, 2xy)$; $\quad (x, y) \mapsto (\xi, \eta) = (x + y, x^2 + xy)$;

$(x, y) \mapsto (\xi, \eta) = (\cos(x - y), \sin(x + y))$; $\quad (x, y) \mapsto (\xi, \eta) = (\cos(x - y), \sin(x - y))$.

Esercizio 3.3. Sia $P = (x, y, z)$ un punto dello spazio $\mathbb{R}^3$. In coordinate sferiche abbiamo

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta, \\ y = r \sin\varphi \sin\theta, \\ z = r \cos\varphi, \end{cases}$$

dove r è la distanza di P dall'origine, φ è l'angolo formato dal vettore OP con l'asse z e θ è l'angolo formato dalla proiezione di OP sul piano (x, y) con l'asse x. Verificare che la trasformazione $(r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ è localmente invertibile se $r > 0$ e calcolare il suo determinante jacobiano.