Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. (Foschi) - 2 ottobre 2003.

1. Lo spazio $\mathbb{R}^n$. Funzioni di più variabili

Esercizio 1.1. Dimostrare che per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ valgono l'uguaglianza

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

e la disuguaglianza

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|.$$

Esercizio 1.2. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ determinare il corrispondente interno (=insieme dei punti interni), la chiusura (=insieme dei punti aderenti), la frontiera (=insieme dei punti di frontiera), il derivato (=insieme dei punti di accumulazione).

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) : 1 < x < 2, y > 0\}; & B &= \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, y > 0\}; \\ C &= \{(x,y) : xy < 1\}; & D &= \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\right\}, \\ E &= \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Q}\}, & F &= \{(x,y) : y = \sin(1/x),\ x \neq 0\}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.3. Descrivere in modo esplicito la funzione che associa ad ogni cilindro circolare retto la misura della sua superficie totale. Da quali parametri dipende? Qual'è il suo dominio? E il suo codominio?

Esercizio 1.4. Specificare i domini naturali delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \log(1+xy), \qquad g(x,y) = \arcsin(x+y).$$

Esercizio 1.5. Disegnare alcune curve di livello delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y}, \qquad g(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

2. Limiti. Continuità

Esercizio 2.1. Calcolare i seguenti limiti o spiegare perché non esistono:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} xy + x^2, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 2.2. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Come bisogna definire $f(0,0)$ affinché f sia continua in $(0,0)$?

Esercizio 2.3. Dimostrare che la funzione $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.4. Determinare l'insieme dei punti (x,y) in cui le seguenti funzioni sono continue:

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right); \qquad g(x,y) = \begin{cases} e^{-y/x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

3. Derivate parziali. Differenziabilità

Esercizio 3.1. Determinare tutte le derivate parziali prime e seconde delle funzioni specificate e calcolare il loro valore nel punto indicato:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin(x\sqrt{y}), && (x_0,y_0) = (\pi/3,4); \\ g(x,y,z) &= x^{y\log z}, && (x_0,y_0,z_0) = (e,2,e); \\ h(u,v) &= \frac{uv}{u+v}, && (u_0,v_0) = (0,1). \end{aligned}$$

Esercizio 3.2. Calcolare $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ nel punto $(0,0)$ per la funzione definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2y^2}{x^2-y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 3.3. Mostrare che la funzione $w(x,y) = x^2 + yz$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$x\partial_x w + y\partial_y w + z\partial_z w = 2w.$$

Esercizio 3.4. Sia $v(t,r) = t^k e^{-r^2/(4t)}$. Trovare un valore della costante k in modo che v soddisfi la seguente equazione:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

Esercizio 3.5. Si calcoli il differenziale e il gradiente (quando esistono) in un generico punto $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ delle funzioni:

$$f(x) = \|x\|^2, \qquad f(x) = \|x\|, \qquad f(x) = x_1\|x\|, \qquad f(x) = \frac{x_1}{\|x\|}.$$

Esercizio 3.6. Calcolare la derivata direzionale della funzione $\sqrt{x+2y}$ nel punto $P = (1,2)$ lungo la direzione $\nu = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Esercizio 3.7. Trovare i punti (x,y) e le direzioni $\nu = (\nu_x,\nu_y)$ per cui la derivata direzionale della funzione $f(x,y) = 3x^2+y^2$ assume il suo massimo valore, al variare di (x,y) sulla circonferenza unitaria $x^2+y^2 = 1$.

Esercizio 3.8. Una funzione differenziabile $f(x,y)$ ha nel punto $(1,2)$ derivata direzionale uguale a $+2$ nella direzione di $(3,4)$ e uguale a -2 nella direzione di $(-4,3)$. Determinare il gradiente di f nel punto $(1,2)$.

Esercizio 3.9. Determinare un'equazione cartesiana del piano tangente alla superficie di equazione $xyz = 1$ nel punto $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$.

Esercizio 3.10. Individuare i punti della superficie di equazione $z = x^2+y^2$ tali che il piano tangente in essi passi per il punto $(0,0,-4)$.

Esercizio 3.11. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ due campi vettoriali definiti nel modo seguente:

$$f(x,y) = \left(e^{x+2y}, \sin(2x+y)\right), \qquad g(u,v,w) = \left(u+2v^2+3w^3, 2w-u^2\right).$$

Calcolare le matrici jacobiane di f e di g in punti generici. Sia $h = f \circ g$ la composizione di g con f. Calcolare la matrice jacobiana di h nel punto $(1,-1,0)$.

Esercizio 3.12. Si calcoli la matrice jacobiana della mappa che trasforma la coppia (x,y) delle coordinate cartesiane di un punto del piano nella coppia (r,θ) delle corrispondenti coordinate polari.

Esercizio 3.13. Si determini per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ risultano differenziabili su tutto $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+2y^2}-1}{(2x^2+y^2)^\alpha} \qquad \text{se } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0;$$

$$f(x,y) = \frac{\arctan(x^2+y^2)}{(x^4+3y^4)^\alpha} \qquad \text{se } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0;$$

$$f(x,y) = \frac{|x^2-y^2|^\alpha}{\arctan(2x^2+y^2)} \qquad \text{se } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0;$$

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha + y^4}{\sqrt{2x^2+y^2}} \qquad \text{se } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0)=0.$$

Esercizio 3.14. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+9y^2 < 9\}$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+9y^2, & \text{se } (x,y) \in A, \\ 9, & \text{se } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni sono vere:

(1) f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.
(2) $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sono definite in tutti i punti dell'ellisse $x^2+9y^2=9$.
(3) $\partial_x f$ è continua in $(0,1)$ e $\partial_y f$ lo è in $(3,0)$.
(4) f è differenziabile in $(0,1)$ e $(3,0)$.

Esercizio 3.15. Calcolare $F'(t)$ e $F''(t)$, dove F è la funzione definita da

$$F(t) = f(X(t), Y(t)),$$

nei seguenti casi:

$$f(x,y) = x^2+y^2, \qquad X(t)=t, \qquad Y(t)=t^2,$$

$$f(x,y) = e^{xy}\cos(xy^2), \qquad X(t)=\cos t, \qquad Y(t)=\sin t.$$

Esercizio 3.16. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ovunque. Poniamo $g(x,y) = f(x/y)$. Mostrare che g è soluzione della seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Esercizio 3.17. Sia $u(x,y)$ una funzione che ammetta derivate prime e seconde continue. Sia $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Mostrare che u è soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

(ovvero u è una funzione armonica) se e solo se v è soluzione dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$$

(equazione di Laplace in coordinate polari).

Esercizio 3.18. Scrivere lo sviluppo di Taylor del secondo ordine con centro nell'origine per le funzioni:

$$f(x,y) = e^{xy}, \qquad g(x,y,z) = \sqrt{1+(x+y)z}.$$

Esercizio 3.19. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{|x|^3 + |y|^3}, \quad \text{per } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

Calcolare (se esiste) la derivata direzionale di f nel punto $(0,0)$ lungo la direzione $\nu = (\cos\theta, \sin\theta)$. La funzione f è differenziabile? La funzione f è continua?

Esercizio 3.20. Si considerino le funzioni $f(x,y)$ e $g(u,v,w)$ definite da:

$$f(x,y) = \left(e^x, \log y, \sqrt{x+y}\right), \qquad g(u,v,w) = u^2 + \frac{v}{w}.$$

(1) Determinare i campo di esistenza naturali di f, di g e di $g \circ f$.
(2) Determinare il differenziale di f nel punto $(1,1)$.
(3) Determinate il differenziale di g nel punto $f(1,1)$.
(4) Determinare il differenziale di $g \circ f$ nel punto $(1,1)$.

Esercizio 3.21. Sia $f(x,y) = ax^2y^3 + y$. Per valore del parametro reale a la derivata direzionale di f nel punto $(1,1)$ nella direzione della retta $x - y = 0$, orientata nel senso delle x crescenti, è uguale a -1?

Esercizio 3.22. Sia α un parametro reale. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = |x|^\alpha \log(x^2 + y^2) \quad \text{per } (x,y) \neq 0, \qquad f(0,0) = 0.$$

Determinare per quali α la funzione f è continua nel punto $(0,0)$. Determinare per quali α la funzione f è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Esercizio 3.23. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = \left(e^{x+y} - 1, \log(1 + y^2)\right).$$

Osserviamo che $f(0,0) = (0,0)$. Si determini il differenziale $\mathrm{d}g(0,0)$ della funzione $g = f \circ f \circ f \circ f \circ f$ ottenuta componendo la funzione f con se stessa 5 volte.

Esercizio 3.24. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{quando } x > 0 \text{ e } x > y, \\ e^{-1/y}, & \text{quando } y > 0 \text{ e } y \geq x, \\ 0, & \text{quando } x \leq 0 \text{ e } y \leq 0. \end{cases}$$

- Determinare se f è differenziabile nel punto $(0,0)$.
- Determinare se f è differenziabile nel punto $(1,1)$.