

Analisi Matematica 2 – Ing. Edile-Architettura – (Foschi)
Compito del 23 febbraio 2005

Esercizio 1 (6 punti). Si determinino A, B, C , in modo che i grafici di

$$F(x, y) = y + \arctan(x - y) \quad \text{e di} \quad G(x, y) = Ax^2 + By^2 + C,$$

abbiano lo stesso piano tangente nel punto $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Per tali valori di A, B, C , si verifichi che $(2, 1)$ è un punto critico della funzione $H(x, y) = F(x, y) - G(x, y)$ e si determini se si tratta di un massimo, di un minimo, o di un punto di sella.

Esercizio 2 (5 punti). Il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) := \cos(x + u) + \sin(y + v) = 0, \\ G(x, y, u, v) := \cos(x - u) + \sin(y - v) = 0, \end{cases}$$

definisce implicitamente una relazione tra le variabili x, y, u, v . Si determini per quale dei seguenti punti

$$P_1 = (x_1, y_1, u_1, v_1) := \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad P_2 = (x_2, y_2, u_2, v_2) := \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right),$$

esiste una rappresentazione esplicita di tale relazione nella forma

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y), \\ v = \psi(x, y), \end{cases}$$

valida in un intorno del punto.

Esercizio 3 (6 punti). Si determini per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ risulta convergente la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + n^\beta} - \cos(n^\beta) \right).$$

Esercizio 4 (5 punti). Si determini la soluzione $u(t)$ dell'equazione differenziale $u'' = u - t^2$ che si annulla nell'origine, $u(0) = 0$, ed è pari, ovvero tale che $u(t) = u(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 (5 punti). Sia γ la curva in \mathbb{R}^3 ottenuta come intersezione del cilindro parabolico di equazione $y = x^2$ con il cilindro parabolico di equazione $z = x^2$. Si calcoli il lavoro compiuto dal *gradiente* della funzione $f(x, y, z) = xy^2z^3$ lungo il tratto di γ che va dal punto $(-1, 1, 1)$ al punto $(1, 1, 1)$.

Esercizio 6 (5 punti). Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva parametrizzata da $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\sin(t), 0, t)$.