

Analisi Matematica 2 – Ing. Edile-Architettura – (Foschi)
Compito del 2 febbraio 2005

Esercizio 1. Determina per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y)^\alpha, & \text{se } \sqrt{|y|} < x, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

è differenziabile nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 2. Determina la soluzione $(x(t), y(t))$ del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x - y \end{cases}$$

con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Disegna poi nel piano la curva parametrizzata da $(x(t), y(t))$.

Esercizio 3. Calcola l'area della superficie della regione delimitata da due cilindri circolari di raggio R i cui assi si intersecano ortogonalmente, impostando e risolvendo un opportuno integrale di superficie.

Esercizio 4. Inventare un esempio esplicito di una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che abbia un punto di minimo assoluto in $(1, 0)$, un punto di massimo assoluto in $(0, 1)$, un punto di sella in $(0, 0)$.

Esercizio 5. Determina il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.