

**Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. - (Foschi)**  
**Compito del 21 giugno 2004**

Nome e Cognome:	Matricola:
-----------------	------------

*Esercizio 1.* Si considerino le funzioni  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definite da

$$F(x, y) = \int_y^x e^{-s^2} ds, \quad G(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2), \quad H(t) = (\sqrt{t}, \log(t)).$$

Sia  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione composta  $f = F \circ G \circ H$ , ovvero

$$f(t) = F(G(H(t)))$$

per  $t > 0$ . Calcolare il valore della derivata  $f'$  nel punto  $t = 1$ . [Si ricordi che se  $\varphi(s)$  è una funzione continua e  $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(s) ds$  allora  $\Phi$  è una primitiva di  $\varphi$ , ovvero  $\Phi' = \varphi$ .]

*Esercizio 2.* Determinare tre numeri positivi  $x, y, z$  tali che

$$x + y + z = 10,$$

per i quali il prodotto  $xy^2z^3$  assume il valore massimo.

*Esercizio 3.* Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha + 1}$$

al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ . [Conviene determinare prima per quale  $\beta \in \mathbb{R}$  si ha  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx n^\beta$  per  $n \rightarrow \infty$ .]

*Esercizio 4.* Determinare per quali valori dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$ , la soluzione  $y(t)$  dell'equazione differenziale non lineare

$$y'' + (y')^2 = 0,$$

con dati iniziali  $y(0) = a$  e  $y'(0) = b$ , è definita sull'intervallo  $] -1, 1[$ . [Se si pone  $z(t) = y'(t)$ , l'equazione del secondo ordine per  $y$  diventa un'equazione del primo ordine per  $z$ .]

*Esercizio 5.* Calcolare il perimetro, l'area e il baricentro della porzione di piano delimitata dalla parabola  $x = y^2 - 1$  e dalla retta  $x = y + 1$ . [Può essere utile sapere che la funzione

$$\frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\log(\sqrt{1+4t^2} + 2t)$$

è una primitiva della funzione  $\sqrt{1+4t^2}$ .]

*Esercizio 6.* Si enunci la formula di Gauss-Green con opportune ipotesi di regolarità per la sua validità e se ne descriva una sua applicazione.