Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. - (Foschi)
Compito del 23 febbraio 2004

Nome e Cognome:	Matricola:

Esercizio 1 (6 punti). Si determinino A, B, C, in modo che i grafici di

$$F(x,y) = x - \arctan(x-y) \qquad \text{e di} \qquad G(x,y) = Ax + By + C,$$

abbiano lo stesso piano tangente nel punto $(x_0, y_0) = (2,1)$. Si ponga

$$H(x,y) = F(x,y) - G(x,y) = x - \arctan(x-y) - Ax - By - C.$$

Si verifichi che $(2,1)$ è un punto critico di H e si determini se si tratta di un massimo, di un minimo, o di un punto di sella.

Esercizio 2 (5 punti). Il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) := \cos(x+u) - \sin(y+v) = 0, \\ G(x,y,u,v) := \cos(x-u) - \sin(y-v) = 0, \end{cases}$$

definisce implicitamente una relazione tra le variabili x, y, u, v. Si determini per quali dei seguenti punti

$$P_1 = (x_1, y_1, u_1, v_1) := \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad P_2 = (x_2, y_2, u_2, v_2) := \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right),$$

esiste una rappresentazione esplicita di tale relazione nella forma

$$\begin{cases} u = \varphi(x,y), \\ v = \psi(x,y), \end{cases}$$

valida in un intorno del punto.

Esercizio 3 (5 punti). Si determini per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ risulta convergente la seguente serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^\beta} - \frac{n}{(n-1)^\beta} \right).$$

Esercizio 4 (5 punti). Si determini la soluzione $u(t)$ dell'equazione differenziale $u'' = u + t^2$ che si annulla nell'origine, $u(0) = 0$, ed è pari, ovvero tale che $u(t) = u(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 (5 punti). Sia γ la curva in $\mathbb{R}^3$ ottenuta come intersezione del cilindro parabolico di equazione $x = z^2$ con il cilindro parabolico di equazione $y = z^2$. Si calcoli il lavoro compiuto dal *gradiente* della funzione $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$ lungo il tratto di γ che va dal punto $(1,1,-1)$ al punto $(1,1,1)$.

Esercizio 6 (5 punti). Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva parametrizzata da $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), 0, t)$.