Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. - (Foschi)
Compito del 9 febbraio 2004

Nome e Cognome:	Matricola:

Nei primi tre esercizi si considerino le funzioni $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$G(u,v) = \log(u) - \frac{1}{\pi}\cos(\pi v), \qquad H(x,y) = \big(x^2 + y^2 + 1, x + y\big),$$

e la funzione composta $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x,y) = G(H(x,y))$; si considerino inoltre il punto $(x_0, y_0) = (1,3)$, e il valore

$$k_0 = F(x_0,y_0) = \log(11) - \frac{1}{\pi}.$$

Esercizio 1 (4 punti). Si determinino i valori massimo e minimo che la derivata direzionale di $F(x,y)$ può assumere nel punto (x_0,y_0) al variare della direzione.

Esercizio 2 (4 punti). Si verifichi che l'origine $(0,0)$ è un punto critico di F e si determini se si tratta di un massimo, di un minimo, o di un punto di sella.

Esercizio 3 (4 punti). Si verifichi che la curva di livello descritta implicitamente dall'equazione $F(x,y) = k_0$ può essere esplicitata nella forma $y = f(x)$ in un intorno del punto (x_0,y_0) e si calcoli $f''(x_0)$.

Esercizio 4 (5 punti). Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si studi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(n) \left(\frac{3\lambda}{1+\lambda^2}\right)^n.$$

Esercizio 5 (5 punti). Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6 (5 punti). Sia γ la curva in $\mathbb{R}^3$ ottenuta come intersezione del cilindro di equazione $x^2 + (y+1)^2 = 1$ con il paraboloide di equazione $z = 4 - x^2 - y^2$. Si determini se la lunghezza di γ è maggiore, uguale o minore della lunghezza del grafico di un periodo della funzione $t \mapsto \sin(t)$.

Esercizio 7 (5 punti). Si calcoli il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z la curva parametrizzata da $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), 0, t)$.