Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. - (Foschi)
Compito del 12 gennaio 2004 - Seconda parte.

Su ogni foglio, compreso il testo, scrivete il vostro nome e numero di matricola. Svolgete gli esercizi scrivendo in maniera chiara e leggibile, spiegando anche a parole il procedimento che adottate nella risoluzione. Numerate i fogli da correggere e sbarrate i fogli di malacopia. Al termine consegnate TUTTI i fogli, compreso il testo.

Esercizio 1 (7 punti). Si determini lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto 0 della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}, \qquad -1 < x < 1,$$

e se ne determini il raggio di convergenza. (Suggerimento: ricavare prima lo sviluppo in serie della derivata $f'(x) = 1/(1-x^2)$ a partire dalla serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = 1/(1-y)$ con $y = x^2$; poi, applicare i teoremi di integrazione termine a termine per serie uniformemente convergenti.)

Esercizio 2 (7 punti). Si consideri la soluzione $u(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+t^2)u' - u = \arctan(t), \\ u(0) = k. \end{cases}$$

Si determini per quale valore di k si ha $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

Esercizio 3 (7 punti). Si determini per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + xy - y^2, \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

ha concavità rivolta verso l'alto nel punto $x = 0$.

Esercizio 4 (7 punti). Si calcoli la massa di un solido che occupa la regione di spazio

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$$

e la cui densità è descritta dalla funzione $\rho(x,y,z) = (x+y)z$.

Esercizio 5 (7 punti). Un fluido si muove all'interno del tubo cilindrico

$$\mathcal{T} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 9\right\},$$

con velocità descritta dal campo vettoriale

$$V(x,y,z) = \left(-y, x, x^2 + y^2\right).$$

Si calcoli il *flusso* del fluido che attraversa la porzione $\mathcal{S}$ del paraboloide di equazione $z = 9 - x^2 - y^2$ contenuta nel cilindro $\mathcal{T}$.