Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. - (Foschi)
Compito del 12 gennaio 2004 - Prima parte.

Su ogni foglio, compreso il testo, scrivete il vostro nome e numero di matricola. Svolgete gli esercizi scrivendo in maniera chiara e leggibile, spiegando anche a parole il procedimento che adottate nella risoluzione. Numerate i fogli da correggere e sbarrate i fogli di malacopia. Al termine consegnate TUTTI i fogli, compreso il testo.

Esercizio 1 (7 punti). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^4 y\right)^\alpha, & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ oppure } y \leq 0. \end{cases}$$

Si determini per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta continua e per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f risulta differenziabile.

Esercizio 2 (7 punti). Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Si consideri la funzione $F : \Omega \to \Omega$ definita da

$$F(x,y) = \left(x^{-y}, y^{-x}\right).$$

Dopo aver ricordato la definizione di *invertibilità locale* in un punto, per una funzione di due variabili reali a valori in R^2, si determini per quali punti $(x,y) \in \Omega$ la funzione F è locamente invertibile in (x,y).

Esercizio 3 (7 punti). L'equazione

$$\frac{2y}{\pi} + \cos(x) = e^{x-y}$$

descrive implicitamente una curva γ nel piano (x,y) passante per il punto $P = (\pi, \pi)$. Si scriva l'equazione della retta tangente a γ in P. Sia poi $y = f(x)$ l'espressione esplicita di γ in un intorno di P. Si scrivano i primi tre termini dello sviluppo di Taylor della funzione f nel punto $x_0 = \pi$.

Esercizio 4 (7 punti). Si calcolino i valori massimo e minimo che la funzione

$$f(x,y) = y^2 + \cos(x^2)$$

assume al variare di (x,y) nell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Esercizio 5 (7 punti). Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si discuta il carattere della seguente serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n} \left(\log(1+n^2)\right)^\alpha.$$