

**Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. - (Foschi)**  
**Prova parziale del 31 ottobre 2003.**

Su ogni foglio, compreso il testo, scrivete il vostro nome e numero di matricola. Svolgete gli esercizi scrivendo in maniera chiara e leggibile, spiegando anche a parole il procedimento che adottate nella risoluzione. Numerate i fogli da correggere e sbarrate i fogli di malacopia. Al termine consegnate TUTTI i fogli, compreso il testo.

Nome e Cognome:	Matricola:
-----------------	------------

*Esercizio 1.* Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si discuta al variare di  $\alpha > 0$ , la differenziabilità di  $f$  nel punto  $(0, 0)$ .

*Esercizio 2.* Siano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x, y) = \left( x^2 + \cos(\pi y), \log(1 + x^2 y^2), \sqrt{1 + x^2} \right), \\ g(u, v, w) = \sin(uv) - ue^w.$$

Si consideri la composizione  $h = g \circ f$ . Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $z = h(x, y)$  nel punto  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ .

*Esercizio 3.* Si studino i punti critici delle curve  $x = f(y)$  definite implicitamente dall'equazione  $F(x, y) = 0$ , dove

$$F(x, y) = x^2 - x^4 - x^2 y^2 + y^4.$$

Si provi a tracciare un grafico qualitativo di tali curve.

*Esercizio 4.* Calcolare i valori massimo e minimo che la funzione  $F$  definita nell'esercizio precedente assume al variare di  $(x, y)$  nell'insieme

$$A = \{(x, y) : 1/5 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

*Esercizio 5.* Al variare di  $\alpha \geq 0$  si discuta il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^\alpha \frac{1}{1 + \log(n)}$$

(Può essere utile ricordare che se  $\beta > 0$  allora  $\log(n) = o(n^\beta)$  per  $n \rightarrow \infty$  e che  $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + o(t)$  per  $t \rightarrow 0$ .)