

Analisi Matematica 2 - Ing. Edile-Arch. - (Foschi)
Prova parziale del 31 ottobre 2003.

Su ogni foglio, compreso il testo, scrivete il vostro nome e numero di matricola. Svolgete gli esercizi scrivendo in maniera chiara e leggibile, spiegando anche a parole il procedimento che adottate nella risoluzione. Numerate i fogli da correggere e sbarrate i fogli di malacopia. Al termine consegnate TUTTI i fogli, compreso il testo.

Nome e Cognome:	Matricola:
-----------------	------------

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si discuta al variare di $\alpha > 0$, la differenziabilità di f nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 2. Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x, y) = \left(x^2 - \cos(\pi y), \log(1 + x^2 y^2), \sqrt{1 + x^2} \right), \\ g(u, v, w) = \sin(uv) + ue^w.$$

Si consideri la composizione $h = g \circ f$. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $z = h(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Esercizio 3. Si studino i punti critici delle curve $y = f(x)$ definite implicitamente dall'equazione $F(x, y) = 0$, dove

$$F(x, y) = x^4 - y^4 - x^2 y^2 + y^2.$$

Si provi a tracciare un grafico qualitativo di tali curve.

Esercizio 4. Calcolare i valori massimo e minimo che la funzione F definita nell'esercizio precedente assume al variare di (x, y) nell'insieme

$$A = \{(x, y) : 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Esercizio 5. Al variare di $\alpha \geq 0$ si discuta il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^\alpha (1 + \log(n))$$

(Può essere utile ricordare che se $\beta > 0$ allora $\log(n) = o(n^\beta)$ per $n \rightarrow \infty$ e che $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + o(t)$ per $t \rightarrow 0$.)